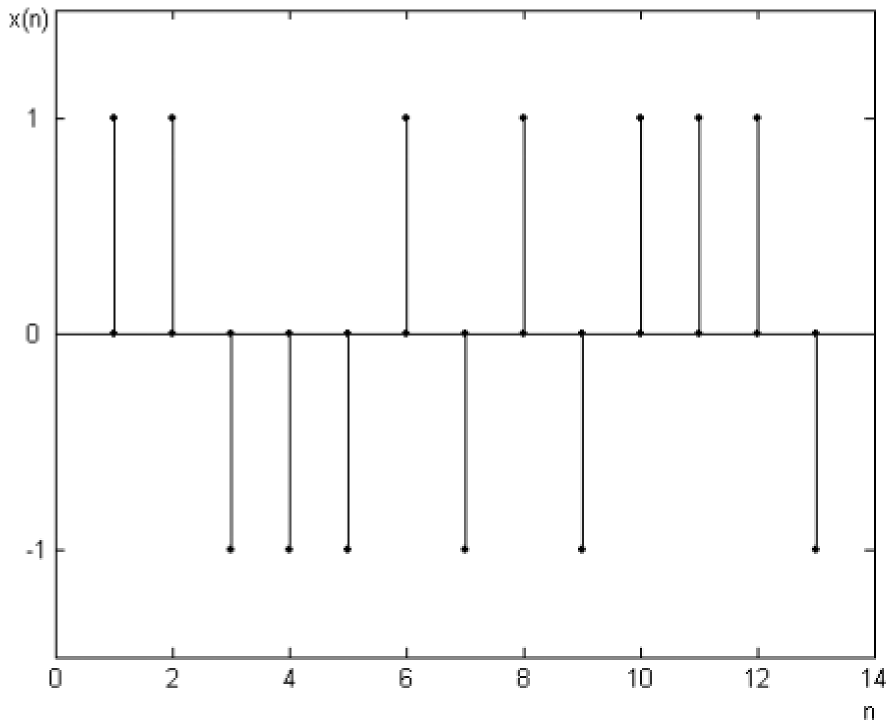
第三章 随机信号表示法

- 3.1 随机信号
- 3.2 随机信号的统计特征描述
- 3.3 几种典型的随机过程
- 3.4 随机信号通过线性系统

3.1 随机信号……

- **(1)** 随机信号中的任何一个点上的取值都是不能先验确定的随机变量



抛硬币得到的随机样本序列

3.1 随机信号……

- (2) 随机信号可以用它的统计平均特征来表征

抛掷硬币的统计结果

实验者	抛掷次数 n	出现正面次数 m	m/n
摩根	2048	1061	0.5181
摩根	2048	1048	0.5117
摩根	2048	1017	0.4966
摩根	2048	1039	0.5073
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

3.1 随机信号

- 事实上，随机信号为纯随机信号与确定性信号的混合随机信号或简称为随机信号。

均值为0的白噪声叫做纯随机信号。

噪声又分为白噪声和色噪声。噪声属于干扰的一种。

干扰为非目标信号，例如ECG的50Hz工频干扰。

白噪声是指功率谱密度在整个频域内均匀分布的噪声，即所有频率具有相同能量的随机噪声。

有色噪声的功率谱密度函数不平坦，常见的色噪声有粉红噪声、红噪声、橙色噪声、蓝噪声、紫噪声、灰色噪声、棕色噪声和黑噪声。

3.2 随机信号的统计特征描述

对于一个随机信号，虽然不能够知道其准确值，但可以通过各种统计特征量来反应其概率分布特性。

- 3.2.1 概率分布函数
- 3.2.2 各态遍历随机过程
- 3.2.3 统计特征量
- 3.2.4 样本数字特征

3.2.1 概率分布函数……

1、一维概率分布函数

对于一个随机变量x_n，用$P_{x_n}(x_1,n)$来表示它的概率分布函数，则有：

$$P_{x_n}(x_1,n)=概率[x_n \le x_1]$$

如果x_n的取值是离散的，利用 $p_{x_n}(x_1,n)$ 来表示概率密度函数：

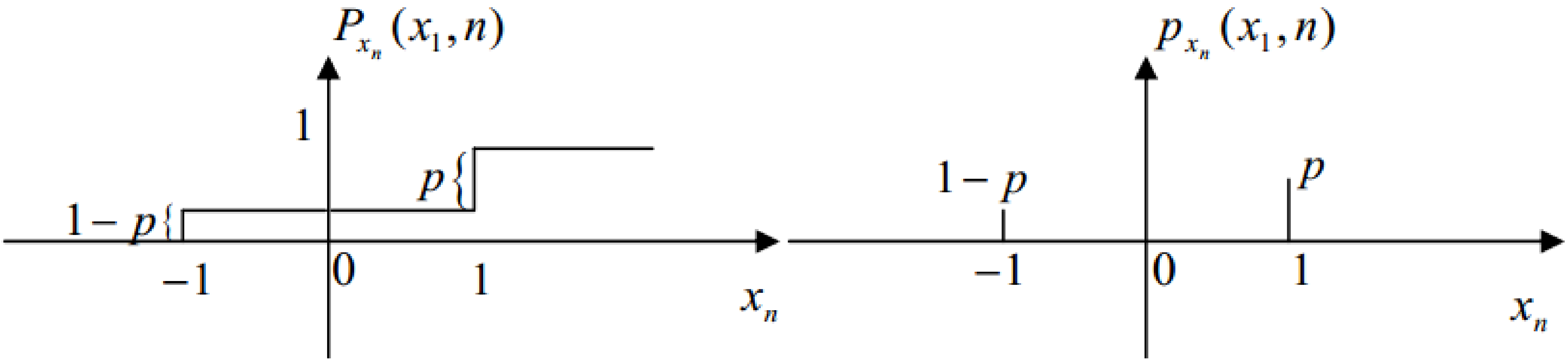
$$p_{x_n}(x_1,n)=概率[x_n = x_1]$$

概率分布函数和概率密度函数之间的关系如下：

$$P_{x_n}(x_1,n)=\int_{-\infty}^{x_1} p_{x_n}(x,n)dx$$

3.2.1 概率分布函数……

- 抛掷银币的概率分布函数和概率密度函数如下图：



3.2.1 概率分布函数

- 2、二维概率分布函数

一个随机过程在两个时间点（n_1和n_2）上的随机变量x_{n1}和x_{n2}之间的二维联合概率分布函数：

$$P_{x_{n1},x_{n2}}(x_1,n_1;x_2,n_2)=\text{概率}[x_{n1}\le x_1,\ x_{n2}\le x_2]$$

对应的二维联合概率密度函数：

$$p_{x_{n1},x_{n2}}(x_1,n_1;x_2,n_2)=\text{概率}[x_{n1}=x_1,\ x_{n2}=x_2]$$

当随机变量x_{n1}和x_{n2}统计独立时，则有：

$$p_{x_{n1},x_{n2}}(x_1,n_1;x_2,n_2)=p_{x_{n1}}(x_1,n_1)\times p_{x_{n2}}(x_2,n_2)$$

3.2.2 各态遍历随机过程……

- 1、平稳随机过程

如果随机信号的概率特性不随时间变化而变化，则称为平稳随机过程，否则称为非平稳随机过程。

一阶平稳过程（**First Oder Stable Process**）：信号的平均值与t无关（m=1）

二阶平稳过程（m=2）：

（1）信号的平均值与t无关；

（2）信号的均方值与t无关；

（3）信号的协方差只是时间间隔的函数，与时间原点的选择无关。

3.2.2 各态遍历随机过程

- 2、各态遍历随机信号

由于平稳随机过程的概率分布不随时间的平移而变化，全体集合的平均就可以用无穷时间的平均来代替，即各态遍历假设。

各态遍历随机信号（Ergodic Random Signal）指所有样本函数在某给定时刻的统计特性与单一样本函数在长时间内的统计特性一致的平稳随机信号。

本书主要分析的就是平稳且各态遍历的医学信号。

3.2.3 统计特征量……

- **1、数学期望（均值）**

  随机变量x_n的均值用m_{x_n}表示，其定义：

$$m_{x_n} = E[x_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

- **2、均方值**

  随机变量x_n的均方值定义：

$$E[x_n^{\ 2}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx$$

3.2.3 统计特征量……

- 3、方差

随机变量x_n的方差定义：

$$\sigma_{x_n}{}^2 = E[(x_n - m_{x_n})^2]$$

由上述三式可以得到方差、均值和均方差的关系如下：

$$\sigma_{x_n}{}^2 = E[x_n{}^2] - m_{x_n}{}^2$$

推导如下：

$$\begin{aligned}\sigma_{x_n}{}^2 &= E[(x_n - m_{x_n})^2] = E[x_n{}^2 - 2x_n m_{x_n} + m_{x_n}{}^2] \\ &= E[x_n{}^2] - 2m_{x_n}E[x_n] + m_{x_n}{}^2 \\ &= E[x_n{}^2] - 2m_{x_n}{}^2 + m_{x_n}{}^2 = E[x_n{}^2] - m_{x_n}{}^2\end{aligned}$$

3.2.3 统计特征量……

- **4、协方差**

一个平稳随机信号的自协方差定义：

$$C_{xx}(m)=E[(x_n-m_x)(x_{n+m}-m_x)]$$

对于两个平稳随机信号$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的互协方差定义：

$$C_{xy}(m)=E[(x_n-m_x)(y_{n+m}-m_y)]$$

这两个协方差展开：

$$\begin{aligned}C_{xx}(m)&=E[(x_n-m_x)(x_{n+m}-m_x)]\\&=E[x_nx_{n+m}-x_nm_x-x_{n+m}m_x+m_x^{\ 2}]\\&=E[x_nx_{n+m}]-m_xE[x_n]-m_xE[x_{n+m}]+m_x^{\ 2}\\&=E[x_nx_{n+m}]-m_x^{\ 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{xy}(m)&=E[(x_n-m_x)(y_{n+m}-m_y)]\\&=E[x_ny_{n+m}-x_nm_y-y_{n+m}m_x+m_xm_y]\\&=E[x_ny_{n+m}]-m_yE[x_n]-m_xE[y_{n+m}]+m_xm_y\\&=E[x_ny_{n+m}]-m_xm_y\end{aligned}$$

3.2.3 统计特征量……

- **5、相关函数**

一个平稳随机信号中的两个时间点上的随机变量x_n和x_{n+m}之间的自相关函数定义：

$$R_{xx}(m)=E[x_n\cdot x_{n+m}]$$

对于两个平稳随机信号$\{x_n\}$和$\{y_n\}$之间的互相关函数定义：

$$R_{xy}(m)=E[x_n\cdot y_{n+m}]$$

自协方差与自相关函数的关系：

$$C_{xx}(m)=R_{xx}(m)-m_x{}^2$$

互协方差与互相关函数的关系：

$$C_{xy}(m)=R_{xy}(m)-m_x m_y$$

3.2.3 统计特征量

- **6、功率谱密度函数**

随机信号是能量无穷的的功率信号，连续或离散信号的功率谱密度函数定义为自相关函数的傅里叶变换：

$$P_x(w) = CTFT[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \longrightarrow \text{连续时间傅里叶变换！}$$

$$P_x(e^{jw}) = DTFT[R_x(m)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x(m) e^{-jwm} \longrightarrow \text{离散时间傅里叶变换！}$$

3.2.4 样本数字特征……

给定有限个样本值 $\{x_i\}_{i=1}^{i=n}$ ，就可以计算一些样本数字特征，这些数字特征只是估计值。

样本平均值： $\hat{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

样本均方值： $E[\hat{m}_x{}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$

样本方差： $\hat{\sigma}_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{m}_x)^2$

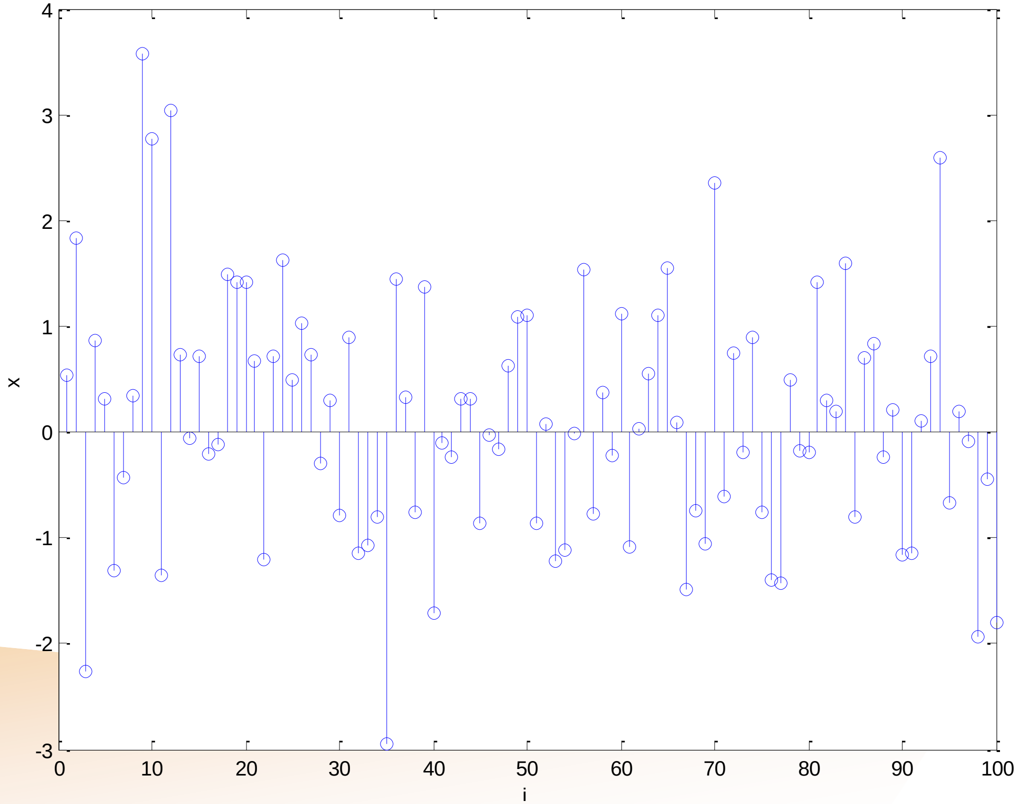
样本协方差： $\hat{C}_{xy}(m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{m}_x)(y_{i+m} - \hat{m}_y)$

样本自相关和互相关函数： $\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+m}$

$\hat{R}_{xy}(m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_{i+m}$

3.2.4 样本数字特征……

【例3-1】随机产生符合高斯分布的100点样本序列（用randn函数），并且均值为0，方差为1，讨论该信号的样本特征量。



3.2.4 样本数字特征……

$\hat{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i =$ **0.0451** → **mean(x)**

$\hat{m}_x^{\ 2} =$ **0.0020** → **mean(x)^2**

$E[\hat{m}_x^{\ 2}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} =$ **0.9533** → **mean(x.^2)**

$\hat{\sigma}_x^{\ 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{m}_x)^2 =$ **0.9609** → **var(x)**

$\hat{C}_{xx}(m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{m}_x)(x_{i+m} - \hat{m}_x)$ →

```
%自协方差函数
x_1=x;
x_1(101:200,1)=x(1:100,1);
for i=1:100
   for j=1:100
   C_1(j,1)=(x_1(j)-ME)*(x_1(i+j)-ME);
   end
   C_2(i,1)=mean(C_1);
end

for k=1:100
C_2(99+k,1)=C_2(101-k,1);
end
```

$\hat{R}_{xx}(m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+m}$ → **xcorr(x, 'unbiased')**

3.2.4 样本数字特征……

程序：

```
clear all
x=randn(100,1);
stem(x)
xlabel('i'),ylabel('x')
ME=mean(x)
mean(x)^2;
mean(x.^2)
VAR=var(x)
%样本自协方差
x_1=x;
x_1(101:200,1)=x(1:100,1);
for i=1:100
   for j=1:100
   C_1(j,1)=(x_1(j)-ME)*(x_1(i+j)-ME);
   end
   C_2(i,1)=mean(C_1);
end

for k=1:100
C_2(99+k,1)=C_2(101-k,1);
end
```

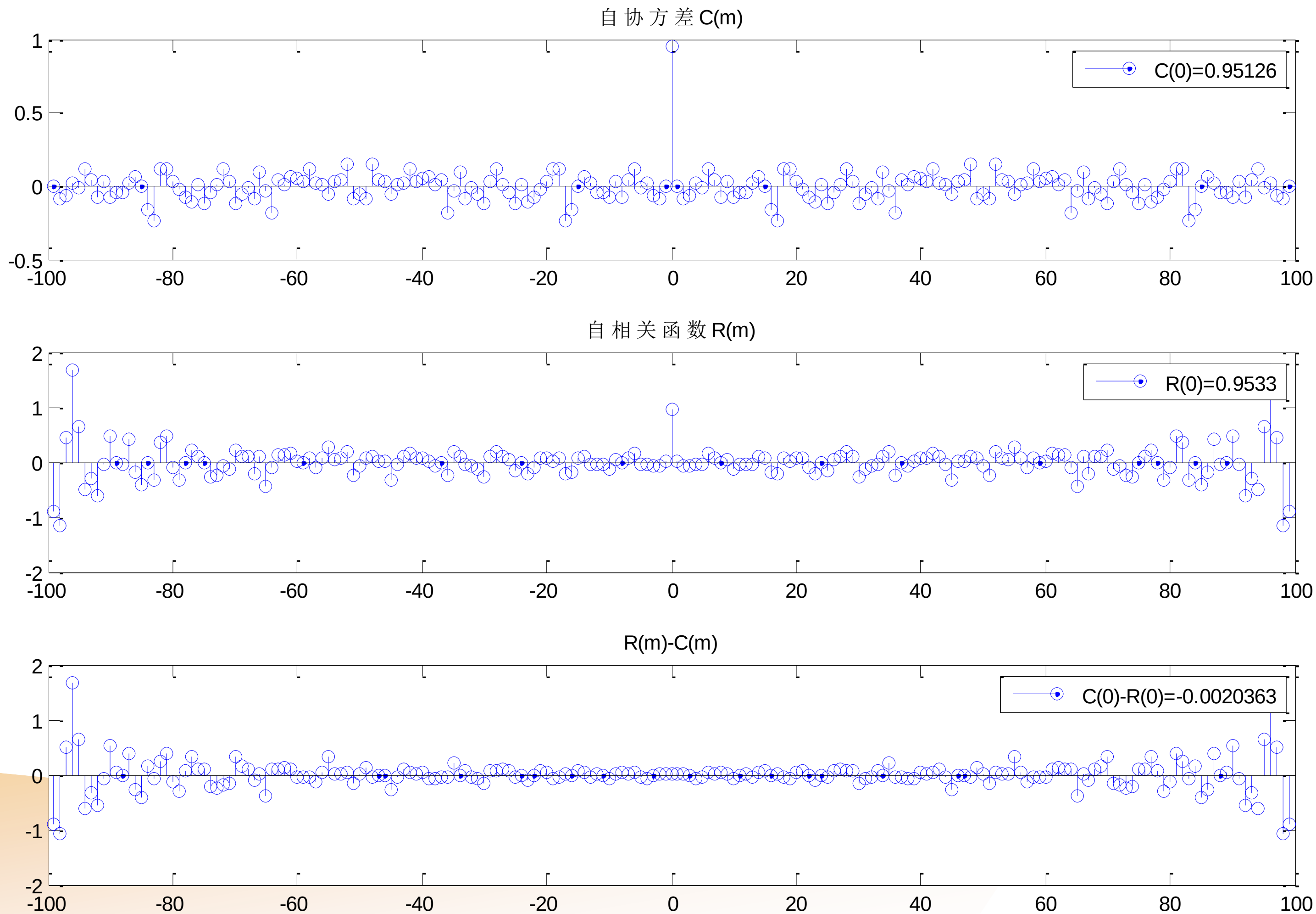
```
XCORR=xcorr(x,'unbiased') %求自相关函数

SUB=XCORR-C_2;

subplot(3,1,1),stem(-99:99,C_2)
title('自协方差C(m)'),legend(strcat('C(0)=',num2str(C_2(100))))
subplot(3,1,2),stem(-99:99,XCORR)
title('自相关函数R(m)'),legend(strcat('R(0)=',num2str(XCORR(100))))
subplot(3,1,3),stem(-99:99,SUB)
title('R(m)-C(m)'),legend(strcat('C(0)-R(0)=',num2str(C_2(100)-XCORR(100))))
```

3.2.4 样本数字特征……

结果:



3.2.4 样本数字特征……

【例3-2】信号的取值在-1~1之间均匀分布，但每一个样本信号的值为常数。判断该随机过程的平稳各态遍历性。

解：平稳性：任何时刻，该信号的概率密度函数都一样（均匀分布），所以平稳。

各态遍历性：因为信号的均值随样本的大小而变化，但整体平均为0，两者不同，因此不是各态遍历。

3.2.4 样本数字特征……

【例3-3】信号的取值是0或A，每隔T秒变一次，但每次具体取值是随机且互相独立的，概率各为1/2。判断该随机过程的平稳各态遍历性。

解：平稳性：任何时刻，因为任意时刻信号取值的概率$p(x=0)=p(x=A)=1/2$，总体均值为$A/2$，所以平稳。

各态遍历性：因为任意样本的时间平均也是$A/2$，因此是各态遍历的。

3.2.4 样本数字特征

【例3-4】假设$x(n)$是平稳随机实信号，证明自相关的3个性质：不等式$R_{xx}(0)\geq R_{xx}(m)$、对称性$R_{xx}(m) = R_{xx}(-m)$和极限值$R_{xx}(\infty)=m_x^2$。

证明：

（1）因为$E[x(n)-x(n+m)]^2\geq 0 \Rightarrow E[x^2(n)-2x(n)x(n+m)+x^2(n+m)]\geq 0 \Rightarrow 2E[x^2(n)]-2E[x(n)x(n+m)] \geq 0$ 又 $R_{xx}(m)=E[x(n)x(n+m)]$，$R_{xx}(0)=E[x^2(n)]$，因此$R_{xx}(0)\geq R_{xx}(m)$。

（2） $R_{xx}(-m)=E[x(n)x(n-m)]=E[x(k+m)x(k)]= R_{xx}(m)$ $\longrightarrow$ 令$n-m=k$

（3） $R_{xx}(\infty)=E[x(n)x(n+m)]|_{m\to\infty}$，此时$x(n)$与$x(n+m)$相互独立，$R_{xx}(\infty)=E[x(n)]E[x(n+m)]|_{m\to\infty}= m_x^2$。

3.3 几种典型的随机过程……

- **1、高斯（正态）过程**

描述过程特性的所有概率密度函数都是高斯型的。

一个变量*x*的正态分布概率密度函数：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

矢量变量$[x_1,x_2,\ldots,x_n]$,均值为$[m_1,m_2,\ldots,m_n]$的正态分布概率密度函数：

$$p(\chi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\gamma|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}[(\chi-\mu)'\gamma^{-1}(\chi-\mu)]}$$

高斯过程经过线性运算（加、减、微分、积分）后也是高斯过程

3.3 几种典型的随机过程……

- 2、理想白噪过程

功率谱为常数的随机过程为白噪过程。设白噪过程***w*(*n*)**的功率谱为：

$$P_w(e^{jw}) = A$$

则其自相关函数为：

$$R_{ww}(m) = IDTFT[P_w(e^{jw})] = A\delta(m)$$

3.3 几种典型的随机过程……

- **3、限带白噪过程**

实际的线性系统是有限的带宽，理想的白噪通过线性系统后也会变成有限带宽 ，用**w(n)**表示限带白噪过程，功率谱为：

$$P_w(e^{jw}) = \begin{cases} A, & |w| \le w_0 \\ 0, & |w| > w_0 \end{cases}$$

则其自相关函数为：

$$R_{ww}(m) = IDTFT[P_w(e^{jw})] = A\frac{w_0}{\pi}\frac{\sin w_0\pi}{w_0 m}$$

3.3 几种典型的随机过程……

随机信号独立、不相关、正交的数学含义：

若$p(x,y)=p(x)p(y)$,则随机变量x和y相互独立；

若$E(xy)=E(x)E(y)$,则随机变量x和y互不相关；

若$E(xy)=0$，则随机变量x和y相互正交。

随机过程$x(n)$、$y(n)$相互独立，则一定互不相关，反之不一定成立。

3.3 几种典型的随机过程……

【例3-5】一个0均值、方差为1的离散时间随机过程各值$x(n)$、$x(n+m)$（m不等于0）均互相独立，求它的自相关函数和功率谱。

解：自相关函数：$R_x(m)=E[x(n)x(n+m)]$

$m=0$时， $R_x(0)=E[x(n)x(n)]=1$

m不为0， $R_x(m)=E[x(n)x(n+m)]=E[x(n)]E[x(n+m)]=0$

所以，$R_{xx}(m)=\delta(m)$

功率谱：$P_{xx}(e^{jw})=DTFT[R_{xx}(m)]=1$ ，因此$x(n)$是一个白噪过程

3.3 几种典型的随机过程

【例3-6】把上例的x_n送入到两点平均器中，得输出为$y_n=1/2(x_n+x_{n-1})$，求y_n的自相关函数和功率谱。

解：自相关函数:$R_y(m)=E[y(n)y(n+m)]$

$$R_y(0)=E[(y(n)^2]=E[1/4(x_n+x_{n-1})^2]$$

$$=1/4E[x_n^2]+1/2E[x_nx_{n-1}]+1/4E[x_{n-1}^2]=1/2$$

$$R_y(1)=E[(y(n)y(n+1)]=E[1/4(x_n+x_{n-1})(x_{n+1}+x_n)]]$$

$$=1/4E[x_nx_{n+1}]+1/4E[x_n^2]+1/4E[x_{n-1}x_{n+1}]+1/4E[x_{n-1}x_n]=1/4$$

由对称性$R_y(-1)=1/4$，当$|m|>1$时，自相关函数都为0

所以，$R_y(m)=1/2\delta(m)+1/4\delta(m-1)+1/4\delta(m+1)$

功率谱：

$$P_y(e^{jw})=DTFT(R_y(m))=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-jw}+\frac{1}{4}e^{jw}=\frac{1}{2}(1+\cos w)$$

补充

补充例题：把上例的x_n送入到两点平均器中，得输出为$y_n=1/2(x_n-x_{n-1})$，求y_n的自相关函数和功率谱。

解：自相关函数:$R_y(m)=E[y(n)y(n+m)]$

$$R_y(0)=E[(y(n)^2]=E[1/4(x_n-x_{n-1})^2]$$

$$=1/4E[x_n^2]-1/2E[x_n x_{n-1}]+1/4E[x_{n-1}^2]=1/2$$

$$R_y(1)=E[(y(n)y(n+1)]=E[1/4(x_n-x_{n-1})(x_{n+1}-x_n)]]$$

$$=1/4E[x_n x_{n+1}]-1/4E[x_n^2]-1/4E[x_{n-1}x_{n+1}]+1/4E[x_{n-1}x_n]=-1/4$$

由对称性$R_y(-1)=-1/4$，当$|m|>1$时，自相关函数都为0

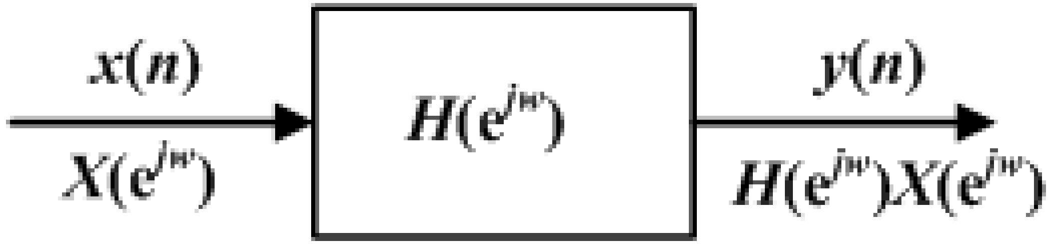
所以，$R_y(m)=1/2\delta(m)-1/4\delta(m-1)-1/4\delta(m+1)$

功率谱：

$$P_y(e^{jw})=DTFT(R_y(m))=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-jw}-\frac{1}{4}e^{jw}=\frac{1}{2}(1-\cos w)$$

3.4 随机信号通过线性系统……

研究确定性信号通过线性系统的常用方法是傅里叶变换，输出等于时域的卷积或频域的乘积。



但是，$x(n)$是随机信号时就无法通过傅里叶变换进行分析，最好的方法是分析输出信号$y(n)$的概率密度函数或者自相关函数与功率谱密度。

3.4 随机信号通过线性系统……

例如，计算输出信号***y*(*n*)**的均值：

$$E[y(n)] = E[\sum_m h(m)x(n-m)] = \sum_m h(m)E[x(n-m)] = m_x \sum_m h(m)$$

由于 $H(e^{jw}) = \sum_m h(m)e^{-jwm}$ ，所以 $H(e^{j0}) = \sum_m h(m)$

因此，$E[y(n)] = m_x H(e^{j0})$

3.4 随机信号通过线性系统……

随机信号通过线性系统的基本关系式为：

1对DTFT $\begin{cases} (1) P_y(e^{jw}) = |H(e^{jw})|^2 \ P_x(e^{jw}) \\ (2) R_y(m) = R_x(m) * h(-m) * h(m) \end{cases}$

$\rightarrow$ 功率谱

$\rightarrow$ 自相关函数

1对DTFT $\begin{cases} (3) P_{xy}(e^{jw}) = H(e^{jw}) P_x(e^{jw}) \\ (4) R_{xy}(m) = R_x(m) * h(m) \end{cases}$

$\rightarrow$ 互功率谱

$\rightarrow$ 互相关函数

相关证明自学！

3.4 随机信号通过线性系统……

【例3-7】输入$x(n)$为0均值、方差为1的白噪声，输出$y(n)=ay(n-1)+x(n)$，求输出的自相关和功率谱。

解：自相关：

$$R_y(m)=E[y(n)y(n+m)]$$

$$R_y(0)=E[y^2(n)]=E[(ay(n-1)+x(n))^2]$$

$$=a^2E[y^2(n-1)]+E[x^2(n)]+2aE[y(n-1)x(n)]$$

因为，$y(n-1)$与$x(n)$无关,所以第三项为0

$$R_y(0)= a^2R_y(0)+R_x(0)=a^2R_y(0)+1$$

所以 $R_y(0)=1/(1-a^2)$

$$R_y(1)=E[y(n)y(n+1)]=E[y(n)(ay(n)+x(n+1))]=aR_y(0)$$

$$R_y(2)=E[y(n)y(n+2)]=E[y(n)(ay(n+1)+x(n+2))]=a^2R_y(0)$$

3.4 随机信号通过线性系统……

续上！

所以，$R_y(m)=a^{|m|}R_y(0)=a^{|m|}/(1-a^2)$

$y(n)=ay(n-1)+x(n)$

两边进行傅里叶变换得：$Y(e^{jw})=aY(e^{jw})e^{-jw}+X(e^{jw})$

等式左右两边除以$X(e^{jw})$，$H(e^{jw})=Y(e^{jw})/X(e^{jw})$,得：

$H(e^{jw})=aH(e^{jw})e^{-jw}+1 \Rightarrow H(e^{jw})=1/(1-ae^{-jw})$, $P_x(e^{jw})=1$

所以，$P_y(e^{jw})=|H(e^{jw})|^2P_x(e^{jw})=1/(1+a^2-2a\cos w)$

3.4 随机信号通过线性系统

【例3-8】和【例3-9】参见pp.36-38

本章小结

1、掌握：随机信号的性质；

2、熟悉：随机过程的统计特征量；

3、了解：各态遍历随机信号。

本章习题

pp.38

3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-6

pp.68

4-6

下集预告

第四章 数字相关和数字卷积